

Применение аппарата нелинейного анализа динамических систем для обработки сигналов ЭЭГ

А.А. Меклер

Введение

Анализ временных рядов методами описания нелинейных динамических систем приобретает всё более широкое распространение. Эти методы с успехом применяются в физике, биологии, при анализе финансовых рынков и в других областях знания.

В терминах данного описания исследуемые процессы называются *хаотическими* или, как ещё говорят, содержат в себе *детерминированный хаос*. С точки зрения линейных методов анализа эти процессы — стохастические. Однако нелинейный анализ показывает, что, хоть их и нельзя причислить к детерминированным, абсолютно случайными они тоже не являются. Другими словами, предсказание системы с определённой точностью оказывается возможным, но лишь на ограниченное число шагов. Существуют различные формальные характеристики хаотических процессов, показывающие, насколько они стохастичны.

Исходя из целей и задач, стоящих перед исследователями, изучение временных рядов можно условно разбить на два "жанра":

1. Имеется ряд значений, который подвергается тщательному изучению, в целях прогнозирования его дальнейшего поведения. В качестве характерного примера можно привести анализ котировок валют на финансовых рынках. При этом реальные механизмы, влияющие на данный процесс, в расчёт не берутся и результаты расчётов не требуют интерпретации. Исследователя интересуют только прогнозируемые значения изучаемого временного ряда.
2. Изучается какой-либо природный объект или явление. Временной процесс, исследуемый при помощи нелинейного анализа, представляет из себя некоторую изменяющуюся во времени характеристику данного объекта. В этом случае полученные формальные параметры временного процесса подлежат интерпретации в терминах описания изучаемого объекта. Примером может послужить анализ *электроэнцефалограммы* (ЭЭГ).

Здесь интерес представляют даже не конкретные значения нелинейных характеристик ЭЭГ, а их изменения под влиянием внешних или внутренних факторов [1]. Существует мнение, что сами численные значения нелинейных характеристик ЭЭГ вообще не подлежат интерпретации [2].

В настоящей статье будут рассматриваться некоторые формальные характеристики хаотических процессов, будет сделан краткий обзор наиболее распространённого программного обеспечения, предназначенного для нелинейного анализа временных рядов. Кроме того, будет впервые описана процедура вычисления одной из наиболее популярных характеристик сигнала ЭЭГ — корреляционной размерности восстановленного аттрактора — при помощи пакета программ TISEAN в автоматическом режиме.

Впервые анализ ЭЭГ этим способом был применён 1986 году [3]. Однако с тех пор так и не была окончательно решена проблема, связанная с полной автоматизацией данной процедуры. Некоторые дополнительные параметры, необходимые для расчета приходится подбирать эмпирическим путём. В самой процедуре расчёта также на некоторых этапах необходимо участие оператора. За много лет был, конечно, накоплен некоторый опыт и разработаны методы, в какой-то степени позволяющие преодолевать эти трудности. Но эти методы не всегда имеют строгую доказательную базу и далеко не всегда успешно могут быть применены. Большая часть настоящей работы посвящена изложению опыта применения методов, позволяющих автоматизировать расчёты в случае анализа ЭЭГ с учётом специфики данного вида сигналов.

1. Некоторые формальные характеристики хаотических процессов

Как уже говорилось, хаотический процесс представляет собой нечто среднее между детерминированным процессом и стохастическим. Формальные характеристики хаотического процесса, как правило, отражают, насколько он близок к процессу детерминированному или, наоборот, к шуму. Иногда в этом случае говорят об оценке детерминизма в процессе.

Для вычисления одних характеристик необходимо восстанавливать фазовую динамику системы (подробнее об этом см. ниже), для других этого не требуется. Рассмотрим сначала последний случай.

IFS clumpiness test.

Дословно это название переводится с английского как *"тест на сгустки в системах итерированных функций"*. Этот тест позволяет отличать белый шум

от коррелированных шумов (розовый, коричневый) и хаотических процессов [4].

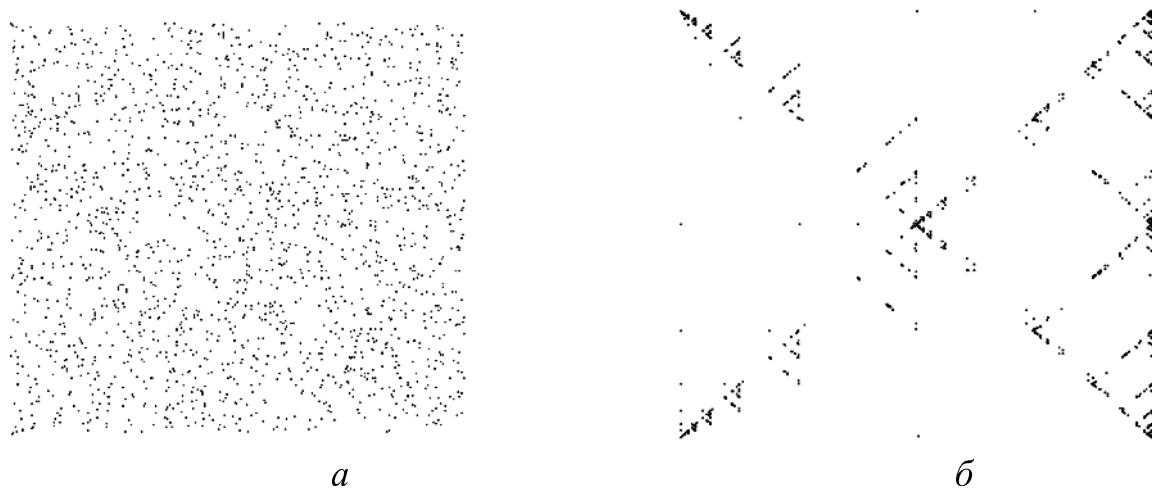
Процедура заключается в следующем:

1. Интервал, занимаемый мгновенными значениями сигнала, разбивается на 4 квартиля.
2. На плоскости чертится квадрат и каждому его углу ставится в соответствие квартиль. Обычно первому квартилю ставится в соответствие левый нижний угол и далее по часовой стрелке.
3. В центре квадрата ставится исходная точка и от неё откладывается половина расстояния в направлении угла, соответствующего квартилю, которому принадлежит первое значение исследуемого сигнала. Далее от полученной точки откладывается половина расстояния в направлении угла, соответствующего квартилю, которому принадлежит следующее значение и т. д.

В итоге исходный ряд отображается на некоторое множество точек внутри заданного квадрата. Характер распределения точек по квадрату, зависит от исследуемого процесса.

Если мы имеем дело с белым шумом, точки заполняют квадрат равномерно (рис. 1 a), детерминированные процессы приводят к появлению диагональных структур (рис. 1 δ); хаотические процессы также приводят к неравномерному распределению точек (рис. 1 γ).

Недостатком метода является тот факт, что можно легко перепутать розовый шум с хаотическим процессом (рис. 1 γ). Кроме того, этот метод не даёт никаких количественных оценок. Поэтому его нельзя применять в тех случаях, когда происходит исследование выборки объектов с последующей статистической обработкой результатов.



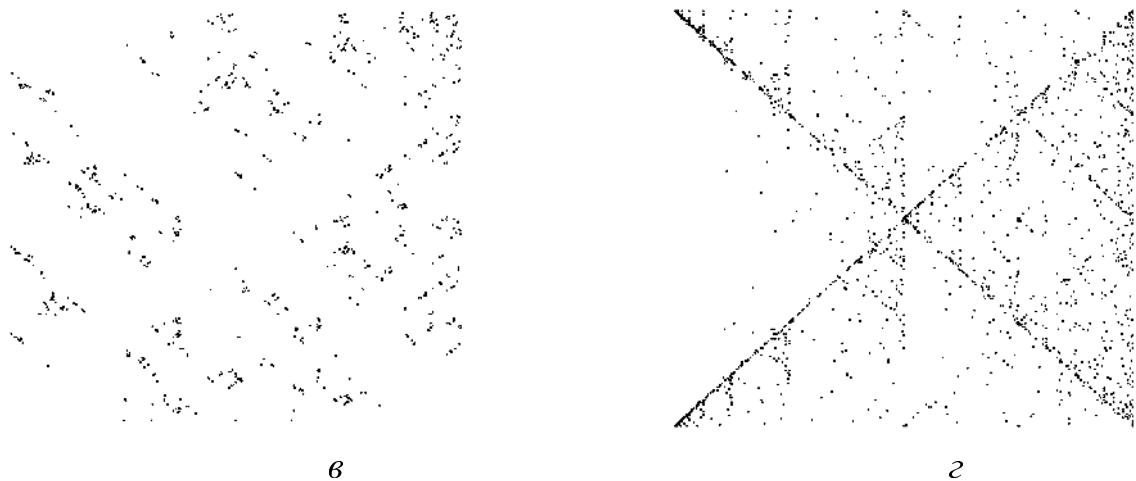


Рис.1. Iterated Function System (IFS) Clumpiness Test — тест на "сгустки" в отображениях итерированных функций: *a* — белый шум; *б* — детерминированный сигнал (три синусоиды, различающиеся по частоте и амплитуде); *в* — хаотический процесс Ikeda; *г* — розовый шум.

К его достоинствам следует отнести возможность оперативной оценки характера исследуемого процесса. При этом оценка получается довольно точной, так как человеческий глаз очень чувствителен к изменениям в пространственных структурах.

Lempel-Ziv complexity.

Есть ещё один довольно простой способ оценки стохастичности процесса. Суть метода заключается в вычислении размеров алфавита, необходимого для передачи сигнала. Для этого предпринимаются следующие шаги. Сначала исходный временной ряд представляется в виде последовательности нулей и единиц — единицы подставляются вместо значений ряда, больших медианы, а нули — вместо меньших. Затем исходная последовательность разбивается на отдельные пакеты (слова) минимальной длины таким образом, чтобы ни один пакет не повторялся. Например, если мы имеем исходный ряд вида

$$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1,$$

то после разбивки он приобретёт вид

$$0 * 1 * 10 * 00 * 11 * 101 * 000 * 1011$$

(символ "*" обозначает разделение между словами). Иначе говоря, избегая повторения слов, мы увеличиваем их длину. Если сигнал по своим свойствам близок к детерминированному, то будет наблюдаться тенденция к повторению одних и тех же слов, что приведёт к быстрому росту их длины. В результате

количество слов, задействованных для передачи исходного ряда, будет меньше, чем в случае со случайным процессом. Введём величину C_{LZ} , которую можно считать мерой стохастичности процесса [5].

Пусть N — длина исходной последовательности, а N_w — количество использованных слов. Тогда

$$C_{LZ} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{L(N)}{N}, \quad L(N) \sim N_w(N) (\log N_w(N) + 1)$$

При росте стохастичности процесса новые слова появляются чаще, и C_{LZ} растёт. Так, например, для синусоидального сигнала рассчитанное значение $C_{LZ}=0,044$, а для белого шума $C_{LZ}=1,047$ (длина исходного ряда в обоих случаях составляла 2000 точек).

Реконструкция динамики системы.

Прежде, чем продолжить описание формальных характеристик хаотических процессов, нам необходимо рассмотреть такие понятия теории сложных систем, как фазовое пространство и аттрактор.

Как уже говорилось, хаотический процесс можно рассматривать как динамику численного значения какой либо переменной, характеризующей исследуемую систему. Однако, как правило, для исчерпывающего описания состояния системы требуется не одна, а несколько переменных. Эти переменные можно объединить в так называемый *вектор состояния*, который в каждый момент времени принимает значения:

$$q = (q_1, q_2 \dots q_n).$$

Пространство, в котором находится данный вектор, называется *фазовым пространством*. Динамика состояния системы описывается этим вектором как функцией времени t : $q = q(t)$ [6].

Множество точек, являющееся последовательностью состояний системы, принято называть её *фазовой траекторией* (иногда ещё фазовую траекторию называют *фазовым портретом системы*). Если поведение системы стохастично, то фазовая траектория равномерно заполняет некоторый объём фазового пространства; если же это детерминированный периодический процесс (периодический потому, что в противном случае один из параметров должен был бы бесконечно возрастать, что противоречит здравому смыслу), то траектория заполнит поверхность какой-либо симметричной фигуры, например — тора [7].

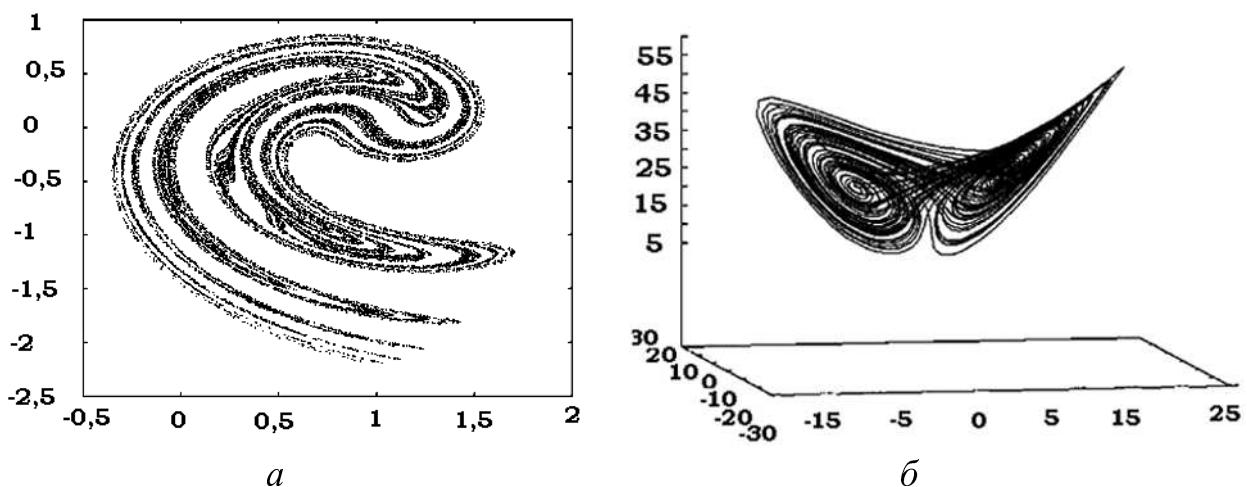
Фазовые портреты систем с хаотическим поведением также заполняют некоторую ограниченную область фазового пространства, но при этом они обладают следующими особенностями:

Во-первых, независимо от того, какими были начальные условия, система, эволюционируя, приходит в определённую область фазового пространства — ту, в которой находится её фазовый портрет. В связи с этой особенностью фазовый портрет называют *аттрактором* системы (от англ. to attract — притягивать). То есть можно сказать, что все траектории состояния системы стягиваются к её аттрактору. Далее мы будем пользоваться именно этим термином. Добавим также, что изучение нелинейной системы во многом связано с изучением её аттрактора.

Во-вторых, несмотря на то, что аттрактор системы занимает некоторый замкнутый объем пространства, траектории, по которым эволюционирует система, никогда не пересекаются. При этом две отстоящие недалеко друг от друга траектории могут в процессе эволюции разойтись на большое расстояние (в пределах аттрактора). Иными словами, хаотическое поведение в пределах аттрактора очень чувствительно к начальным условиям.

В силу того, что траектории, по которым эволюционирует хаотическая система, находятся в замкнутом пространстве, но никогда не пересекаются, размерность её аттрактора всегда меньше, чем размерность фазового пространства [7]. Таким образом, получается, что такие аттракторы имеют размерность, промежуточную между целочисленными значениями размерностей обычных топологических многообразий. Объекты, обладающие нецелочисленной размерностью, называются *фракталами* [8].

Фазовые портреты систем, эволюция которых представляет собой детерминированный периодический процесс, также называются аттракторами, но их размерность целочисленна. Аттракторы же систем, демонстрирующих хаотическое поведение, называются *странными аттракторами* (рис. 2). Строгого математического доказательства того, что все странные аттракторы фрактальны, не существует, однако обратных примеров ещё не найдено.



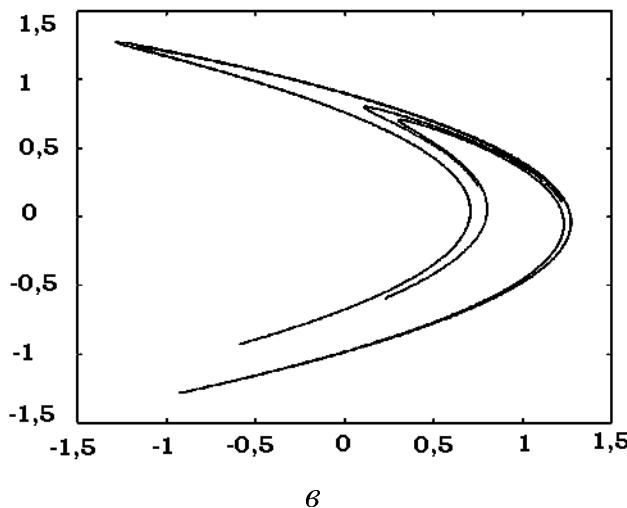


Рис. 2. Аттракторы хаотических систем: а) Икеда (Ikeda); б) Лоренца (Lorentz); в) Хенона (Hénon).

Если мы моделируем систему при помощи набора дифференциальных уравнений, то размерность аттрактора этой системы не будет превышать количество переменных в уравнениях. Иными словами, размерность фазового пространства, в котором находится аттрактор, равна минимальному количеству переменных, которыми можно описать исследуемую систему. Отсюда можно сделать вывод, что чем больше размерность аттрактора системы, тем более сложным и, соответственно, менее предсказуемым является её поведение. Таким образом, размерность аттрактора является мерой стохастичности динамики системы.

Процессы, с которыми мы имеем дело на практике, представляют собой временную последовательность значений какой-либо одной величины.¹ Однако временная последовательность по одной единственной переменной может дать гораздо больше информации обо всей системе, чем это может показаться с первого взгляда. Одним из важнейших достижений теории сложных систем стала теорема Такенса, пользуясь которой можно по эволюции одной переменной составить представление о динамике всей системы, построив аттрактор, по метрическим свойствам аналогичный исходному [12]. Суть этой реконструкции сводится к следующему.

¹Вообще-то говоря, в природе все процессы непрерывны. Но дело в том, что при компьютерной обработке непрерывный процесс оказывается преобразованным в последовательность мгновенных значений сигнала. В результате этого преобразования мы имеем дело уже с некоторой последовательностью чисел. Эту последовательность мы и рассматриваем как временной ряд. Более подробную информацию по этой теме можно почерпнуть из литературы по цифровой обработке сигналов (см., например [9], [10], [11]). Здесь же заметим только, что если замеры мгновенных значений сигнала производятся достаточно часто, то дискретную траекторию, полученную в результате аналого-цифрового преобразования, можно однозначно преобразовать обратно в непрерывную. Для того, чтобы обратное преобразование было возможно, частота замеров мгновенных значений сигнала (так называемая частота дискретизации) должна быть, по крайней мере, в 2 раза выше верхней границы его частотного диапазона – согласно теореме Котельникова.

Пусть имеется исходный процесс $X_0(t)$ — последовательность измеренных мгновенных значений переменной x . Отобразим данный процесс на плоскость следующим образом: каждому исходному значению процесса $x(t_i)$ будет соответствовать точка на плоскости, одна координата которой будет равна $x(t_i)$, а другая — $x(t_i + \tau)$, где τ — некоторая произвольно выбранная величина — так называемый *лаг*. В результате мы получим некоторое множество точек на плоскости. После этого отобразим исходный процесс в трёхмерное пространство. В этом случае координаты по одной оси будут равны $x(t_i)$, по другой — $x(t_i + \tau)$, и по третьей — $x(t_i + 2\tau)$. Итак, при отображении исходной последовательности в n -мерное пространство каждая точка $x(t_i)$ будет отображаться на точку этого пространства с координатами $\{x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (n - 1) \cdot \tau)\}$. Так вот, согласно теореме Такенса, можно подобрать такие n и τ , что полученное в результате описанного преобразования множество точек будет по своим метрическим свойствам воспроизводить аттрактор исследуемой системы (для бесконечного ряда τ может быть любым).

Пространство, задаваемое нами для восстановления исходного аттрактора, называется *пространством вложения* или *лаговым пространством*; множество точек, моделирующее исходный аттрактор — *восстановленным аттрактором*.

Корреляционная размерность восстановленного аттрактора.

Размерность восстановленного аттрактора можно рассматривать как меру стохастичности процесса — чем она меньше, тем сильнее этот процесс детерминирован.

Существуют различные подходы к оценке этой размерности. Их краткий обзор можно найти в [1]. Величина, вычисляемая способом, пользующимся наибольшей популярностью, называется *корреляционной размерностью* (обозначение — D_2) [13]. В настоящей статье мы подробно рассмотрим проблемы, связанные с процедурой её вычисления, и возможные пути их преодоления.

Показатель Ляпунова.

Следующей характеристикой хаотических процессов является показатель Ляпунова (λ). Мы уже говорили, что в пределах аттрактора небольшие изменения начальных условий могут приводить к сильным изменениям в эволюции системы. Показатель Ляпунова может являться мерой того, насколько сильны могут быть эти изменения. Чем чувствительнее система к начальным условиям, тем он больше. Поскольку в n -мерном фазовом пространстве есть n независимых направлений, систему характеризуют n показателей Ляпунова. Вычисляется обычно наибольший из них [14, 15]. Существует алгоритм вычисления этой величины, не требующий восстановления аттрактора, что зна-

чительно ускоряет вычисления [14].

Показатель Ляпунова может быть как положительным, так и отрицательным. Все показатели Ляпунова детерминированного процесса отрицательны или равны нулю; у хаотических процессов хотя бы один положителен.

2. Обзор специального программного обеспечения (ПО)

В настоящее время существует довольно широкий выбор ПО, предназначенного для вычисления нелинейных характеристик временных рядов. Существующие программы распространяются как на коммерческой основе, так и бесплатно – freeware. Бесплатно распространяемые программы с точки зрения функциональных возможностей практически не уступают коммерческим, но, как правило, у них отсутствует графический пользовательский интерфейс (Graphic Users Interface – GUI), что, впрочем, как правило не является помехой в их использовании.

Из коммерческих следует отметить программы CDA и Dataplore®.

Программа CDA (автор – J.C. Sprott, ©1995) может работать на платформе MS-DOS и Windows. У неё очень простой пользовательский интерфейс и с её помощью можно реализовывать множество различных способов нелинейного анализа временных процессов. Набор средств анализа у этой программы один из самых широких. Кроме того, в ней предусмотрена возможность анализа исходных данных некоторыми линейными методами: аппроксимация полиномом (до 4-й степени), спектральный анализ и построение автокорреляционной функции, а также предварительная обработка – сглаживание, дифференцирование, интегрирование, снятие тренда. К недостаткам программы следует отнести следующие её особенности: во-первых, параметры анализа изменяются в небольших пределах и с большим шагом; во-вторых, далеко не все результаты анализа можно сохранять на жесткий диск в виде файла.

Другая коммерческая программа – Dataplore (©Datan GMBH). Это довольно дорогой программный продукт, работает на платформе Windows. У программы имеется удобный графический интерфейс, позволяющий редактировать данные (например, удалять артефакты) непосредственно на графике (так называемый on-graph editing). С функциональной точки зрения программа предоставляет широкий набор средств обработки временных рядов; при этом средства линейной обработки представлены значительно шире, чем нелинейной. Кроме того, возможно написание макрокоманд, а также управление работой программы из командной строки.

Из некоммерческого ПО следует отметить пакеты программ RQA и TISEAN. Оба этих пакета представляют собой просто наборы отдельных "исполнляемых" файлов-программ (executables), работающих без графического интерфейса, управление которыми осуществляется из командной строки.

Программа RQA (автор – C.J. Webber Jr.) в основном предназначена для вычисления D_2 [16, 17]. Кроме того, она позволяет вычислять разновидности корреляционной размерности – point D_2 и point wise D_2 [1, 18] (это не задокументировано, но, в принципе, все необходимые процедуры в этом пакете можно найти; вычисление этих величин в автоматическом режиме с помощью этого пакета невозможно).

Особенный интерес представляет пакет TISEAN (авторы – R. Hegger, H. Kantz и T. Schreiber) [19]. В этот пакет входят программы для предварительной обработки данных, программы линейного анализа сигналов, программы нелинейного анализа и некоторые другие. Как уже отмечалось, одним из наиболее распространённых методов исследования хаотических процессов является вычисление корреляционной размерности восстановленного аттрактора. Программы, входящие в состав пакета TISEAN позволяют это сделать наиболее корректно и с наименьшими затратами времени. Далее будет подробно описана эта процедура.

3. Вычисление корреляционной размерности восстановленного аттрактора

Сначала рассмотрим некий идеальный случай, когда исследуемая временная последовательность бесконечна и действительно представляет собой поведение, которое полностью и исчерпывающе можно смоделировать при помощи системы из конечного числа дифференциальных уравнений.

Вычисление D_2 основано на следующем принципе. Возьмём некоторую точку x_i , принадлежащую аттрактору, восстановленному в лаговом пространстве, и сосчитаем, сколько точек этого аттрактора отстоят от неё на расстояние, не превышающее некоторую величину ε . Повторим эту процедуру для следующей точки и т. д. В результате мы сможем вычислить некоторую величину:

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^N \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|),$$

где $\Theta(x)$ - функция Хевисайда: $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$. Эта зависимость назы-

вается *интегральной корреляционной функцией аттрактора*. Очевидно, что $C(\varepsilon)$ растёт с увеличением ε . При этом если восстановленный аттрактор одномерен, то $C(\varepsilon) \sim \varepsilon$, если он представляет собой поверхность, то $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$; в общем же случае можно записать:

$$C(\varepsilon) \sim \varepsilon^D,$$

где D — размерность восстановленного аттрактора. Здесь необходимо сделать оговорку, что это равенство выполняется только при сравнительно малых ε . Полученное выражение приводится к виду

$$\log C(\varepsilon) = D \log \varepsilon \quad \text{или} \quad D = \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Таким образом, размерность восстановленного аттрактора можно определить как наклон линейного участка графика зависимости $\log C(\varepsilon)$ от $\log \varepsilon$ (см. рис. 3). Для того чтобы верно определить D_2 таким способом, необходимо правильно подобрать величину лага τ и размерность лагового пространства n . Как правило, в литературе размерность лагового пространства обозначается символом D_{emb} (embedding dimension); в настоящей работе мы тоже будем использовать это обозначение.

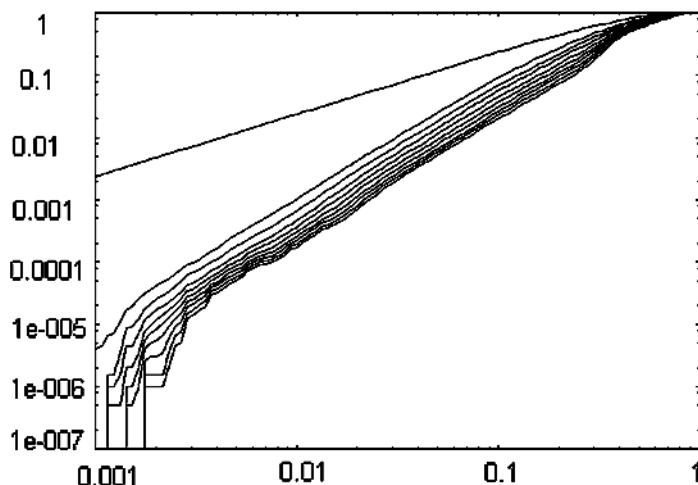


Рис. 3. Корреляционная функция аттрактора Лоренца, вычисленная для десяти значений размерности лагового пространства - от 1 до 10.

Для ряда бесконечной длины величина лага не имеет значения. Размерность лагового пространства D_{emb} можно подобрать исходя из следующих соображений. Восстановление аттрактора описанным способом можно рассматривать как его проецирование в лаговое пространство. Очевидно, что если D_{emb} достаточно велико, то D_2 будет меньше D_{emb} . Если при этом продолжать увеличивать D_{emb} , то D_2 меняться не будет (см. рис. 4). А вот если задаться величиной D_{emb} меньшей, чем размерность исходного аттрактора, то размерность

восстановленного аттрактора будет равна величине D_{emb} . Таким образом, мы можем подобрать D_{emb} , восстанавливая аттрактор в лаговом пространстве всё большей размерности. Если исследуемый процесс действительно хаотический, то график зависимости D_2 от D_{emb} будет сначала возрастать, а потом войдёт в насыщение. Если исследуемый процесс — стохастический, то насыщения не наступит (рис. 4).

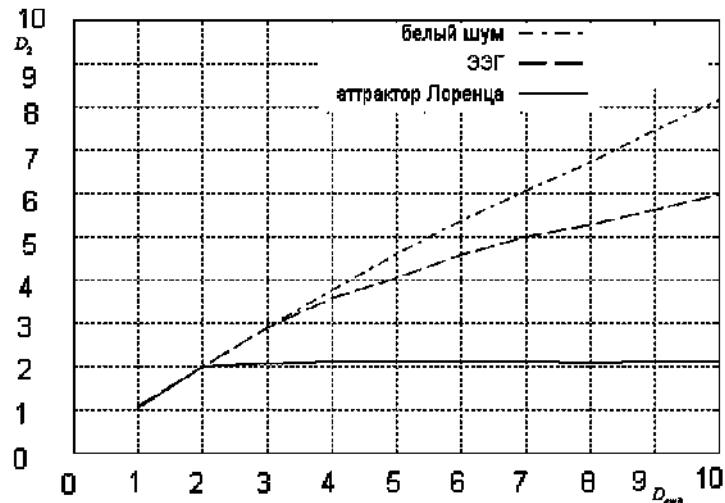


Рис. 4. Значения корреляционной размерности аттракторов, вычисленные при различных размерностях лагового пространства.

4. Вычисление корреляционной размерности восстановленного аттрактора при обработке ЭЭГ

Процедуру вычисления D_2 можно разбить на три этапа:

1. Вычисление $C(\varepsilon)$ для различных значений D_{emb} ;
2. Поиск линейного участка зависимости $\log C(\varepsilon)$ от $\log \varepsilon$ и определение его наклона для каждого значения D_{emb} ;
3. Определение оптимального значения D_{emb} и соответствующей ему величины D_2 .

При работе с реальными процессами, в частности, с процессами электрической активности головного мозга, на каждом из этих этапов исследователь сталкивается с рядом проблем, возможные пути решения которых описаны в данном разделе.

Вычисление корреляционного интеграла.

На этом этапе мы встречаем следующие трудности:

- исследуемый процесс должен быть стационарным. ЭЭГ, снимаемая длительное время не является стационарным процессом, так как в ней находит своё отражение постоянное изменение условий внешней и внутренней среды организма;
- при исследовании ЭЭГ мы располагаем временной последовательностью ограниченной длины, в то время, как теоремы, касающиеся вычисления D_2 сформулированы и доказаны для бесконечных последовательностей; в частности, это касается проблемы выбора величины лага τ .

Рассмотрим некоторые способы их преодоления.

Если говорить о стационарности процесса, то это требование можно считать практически соблюдённым в пределах участка ЭЭГ продолжительностью до 1 сек. [20]. При больших длительностях регистрации может возникать ошибка. В одних случаях её можно расценивать как случайную, а в других — как систематическую, подбирая соответствующие методы статистической обработки результатов. Здесь всё зависит от условий и задач эксперимента.

Альтернативный алгоритм вычисления корреляционной размерности – Point D_2 — предназначен как раз для решения этой проблемы [1]. Отличительной особенностью этого алгоритма является то, что в процессе вычислений программа автоматически ищет участки ЭЭГ, в пределах которых процесс можно считать стационарным, и вычисляет корреляционную размерность для каждого из этих участков в отдельности. С нашей точки зрения этот подход имеет весьма уязвимые стороны. Во-первых, в результате вычислений мы имеем дело не с каким-то одним числом, а с набором чисел. Оказывается непонятно, какое из них считать результатом вычислений для последующей статистической обработки данных. Во-вторых, каждое значение D_2 оказывается вычисленным на довольно коротком участке ЭЭГ, то есть оказывается использовано небольшое число точек в исходном ряду. Как будет показано ниже, это обстоятельство приводит к ошибкам в вычислениях.

Теперь рассмотрим проблемы, возникающие в связи с конечностью обрабатываемого ряда. Эти проблемы можно решать двумя способами: во-первых, используя для анализа достаточно длинный ряд, чтобы его можно было считать бесконечным, и, во-вторых, путём модификации классического алгоритма вычислений.

В первом случае существуют различные критерии, определяющие минимальную длину ряда, позволяющую избегать систематических ошибок при вычислении. Например, критерий А. Цониса определяет минимальную длину ряда $N > 10^{2+0,4D}$, где D - предполагаемая корреляционная размерность восстановленного аттрактора [21]. Согласно другим критериям $N > 2^{D(D+1)}$ [22] и $N > 10^{D/2}$ [23]. Наконец, есть мнение, что минимальная длина ряда зависит

не только от параметров размерности, но и от скоррелированности процесса: $N > 2\tau^{D_{emb}/2}$ (здесь τ — время автокорреляционной функции — количество шагов до её первого нуля или минимума) [24].

Нетрудно заметить, что для выполнения этих требований может потребоваться запись ЭЭГ, содержащая порядка 100000 отсчётов, а то и больше. При частоте выборки 250 Гц время записи такой ЭЭГ составит $6 \div 7$ минут, что недопустимо с точки зрения требования к стационарности процесса. В связи с этим, стараясь использовать по-возможности длинные отрезки ЭЭГ, всё-таки приходится вводить в процедуру вычислений дополнительные модификации.

Одна из таких модификаций называется "окно Тейлера" (Theiler window) [24, 19]. Суть её заключается в следующем. Точки, расположенные в исходном ряду в непосредственной близости друг от друга, оказываются, как правило, скоррелированными. В случае конечной длины исходного ряда это приводит к ошибкам в вычислении корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$. Для того, чтобы избежать этих ошибок, можно в процессе вычислений по формуле не принимать в расчет точки, расположенные в исходной последовательности на расстоянии меньше, чем w шагов. Величина w называется окном Тейлера. В [24] указана минимальная величина этого окна: $w < \tau (2/N)^{2/D_{emb}}$ (τ — время автокорреляционной функции). Рекомендуемый размер окна: $w > \tau$ [24]. Также можно встретить исследования ЭЭГ, в которых задаётся фиксированная величина $w = 10$ [25].

Ещё один способ определения оптимальных размеров окна Тейлера — из так называемого *графика пространственно-временного разделения* [26]. Этот график представляет собой кривую равной плотности вероятности того, что две точки временного ряда, находящиеся на расстоянии Δt окажутся в восстановленном аттракторе на расстоянии, не превышающем ε . При этом строится не одна кривая, а семейство кривых, соответствующих разным значениям плотности вероятности (рис. 5). Размер окна Тейлера можно определить как величину Δt , соответствующую первому локальному минимуму, общему для всех кривых [19].

Следующая проблема — выбор величины лага τ . При восстановлении аттрактора из временного ряда, имеющего бесконечную длину, величина лага τ может быть любой. Подбор же оптимальной величины τ в случае конечной длины исходного ряда, к сожалению, проблематичен. В настоящее время не существует универсальных алгоритмов, позволяющих правильно определить эту величину. Тем не менее, для выбора τ можно пользоваться некоторыми рекомендациями.

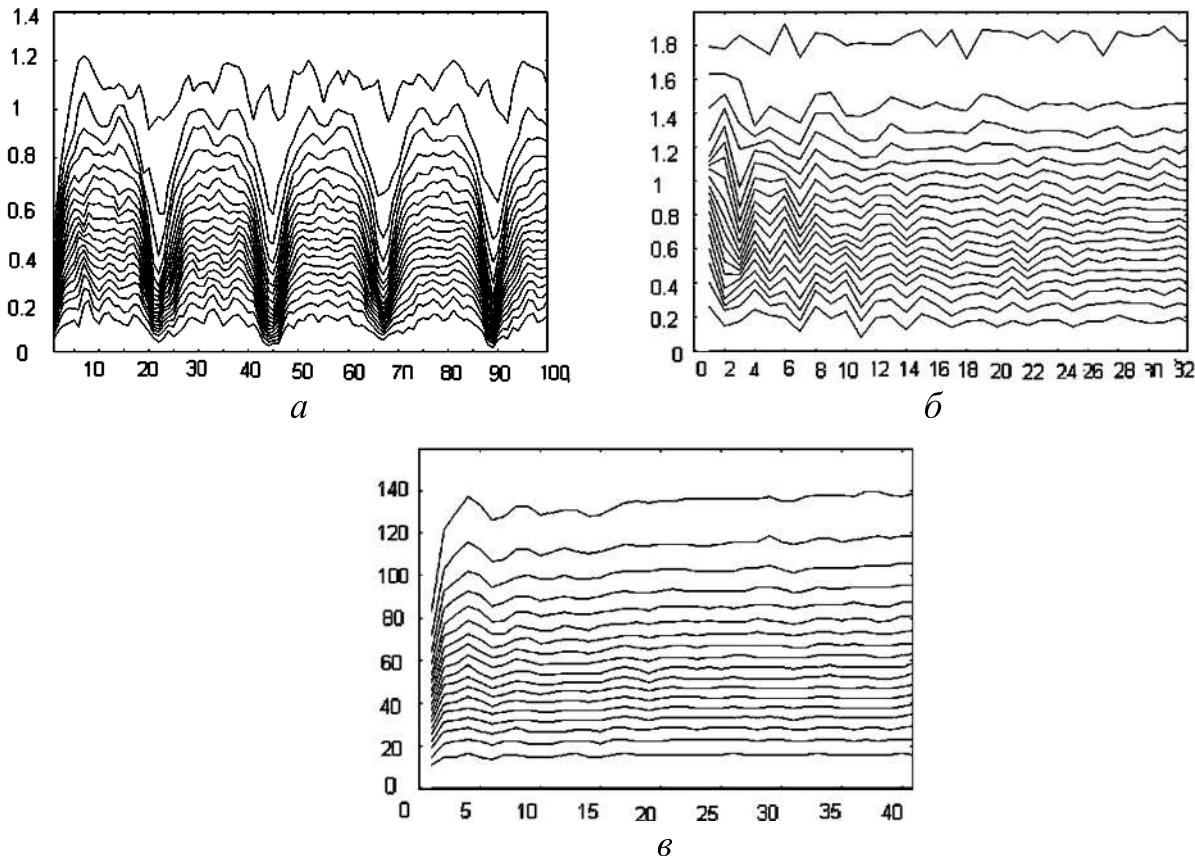


Рис. 5. Графики пространственно-временного разделения (space-time plots) процессов: а) процесс Макей (Makey); б) процесс Икеда (Ikeda); в) электроэнцефалограмма

Основная идея этих рекомендаций заключается в том, что поскольку вектора базиса лагового пространства ортогональны (то есть независимы), координаты точек аттрактора также должны быть независимы друг от друга. Тем самым, точки исходной временной последовательности $t, t+\tau, t+2\tau, \dots$ также должны быть независимыми, нескоррелированными. Поэтому некоторые исследователи выбирают τ , равное расстоянию до первого минимума абсолютного значения автокорреляционной функции процесса.

Существует хорошая альтернатива данному методу – вместо автокорреляционной функции вычислять так называемую *функцию совместной информации* (mutual information), которая как линейную, так и нелинейную связь между двумя переменными (в нашем случае – между t и $t+\tau$) [27]. Под совместной информацией подразумевают следующее. Разобъём числовой отрезок, равный размаху амплитуды сигнала, на несколько интервалов и обозначим через p_i — вероятность, с которой элемент временного ряда может оказаться в i -м интервале, а через p_j — в j -м. Пусть $p_{ij}(\tau)$ — совместная вероятность того, что один элемент временного ряда окажется в i -м интервале, а другой, взятый с задержкой τ — в j -м. Тогда функция совместной информацией будет выглядеть

следующим образом:

$$S(\tau) = - \sum_{i,j} p_{ij}(\tau) \ln \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j}.$$

Оптимальность выбора τ этим способом строго доказана только для случаев, когда $D_{emb} = 2$; в остальных же случаях результат расчёта носит лишь рекомендательный характер.

Заметим, что, несмотря на существование всех этих приёмов, при обработке ЭЭГ иногда выбирают единичный лаг, то есть равный времени квантования сигнала [25]. Это оправдано следующей причиной.

Результат вычисления D_2 с предварительным вычислением лага всё равно подвержен систематической ошибке, так как результаты предварительных вычислений не гарантируют оптимальность выбора τ . С другой стороны, полученная величина всё-таки показывает, насколько стохастичен исследуемый процесс и вполне пригодна для внутригрупповых сравнений в различных условиях эксперимента.

Задаваясь единичной величиной τ , следует помнить, что в этом случае она фактически оказывается равной периоду квантования непрерывного сигнала ЭЭГ. Иначе говоря, если при аналого-цифровом преобразовании сигнала была задана частота квантования 100 Гц, то τ принимает значение 0,01 сек. В существующих комплексах регистрации ЭЭГ обычно принята частота выборки равная $100 \div 250$ Гц, что вполне приемлемо с точки зрения выбора τ .

Поиск линейного участка зависимости $\log C(\varepsilon) \log \varepsilon$.

На этом этапе вычислений встречается ряд проблем, из которых следует выделить две основные:

1. Аттрактор любой физической системы всегда имеет конечные размеры;
2. В ЭЭГ всегда присутствует стохастическая составляющая – шум.

Оба этих обстоятельства приводят к усложнению поиска линейного участка зависимости $\log C(\varepsilon)$ от $\log \varepsilon$. Рассмотрим пути решения этой проблемы.

В идеальном случае для того, чтобы найти линейный участок зависимости $\log C(\varepsilon)$ от $\log \varepsilon$ строят так называемый *график Раппа* – зависимость величины её локальных наклонов от $\log \varepsilon$. Горизонтальный участок графика Раппа, так называемое "плато" называется *областью измерения* (scaling region) и соответствует искомому линейному участку (рис. 6). На рисунке видно, что в область измерения не попадают очень большие и очень маленькие значения ε .

Величину $C(\varepsilon)$ можно рассматривать как среднюю локальную плотность точек аттрактора в совокупности окрестностей радиусом ε . При очень боль-

ших значениях ε на результатах вычислений сказывается геометрия аттрактора, линейные размеры которого оказываются соизмеримыми с ε . Если ε принимает очень маленькие значения, то в силу конечности ряда в сферу такого радиуса попадает очень мало точек и их количество оказывается в большой степени случайной величиной.

Если мы имеем дело с ЭЭГ, то при малых значениях ε к тому же сказывается зашумлённость процесса, так как белый шум приводит к тому, что размерность восстановленного аттрактора оказывается равной D_{emb} . К тому же и сам искомый горизонтальный участок оказывается не идеально плоским.

В связи с этими обстоятельствами поиск области измерения оказывается возможен только визуально и не поддаётся алгоритмизации. Зачастую по внешнему виду графиков тоже оказывается трудно определить границы искомой области.

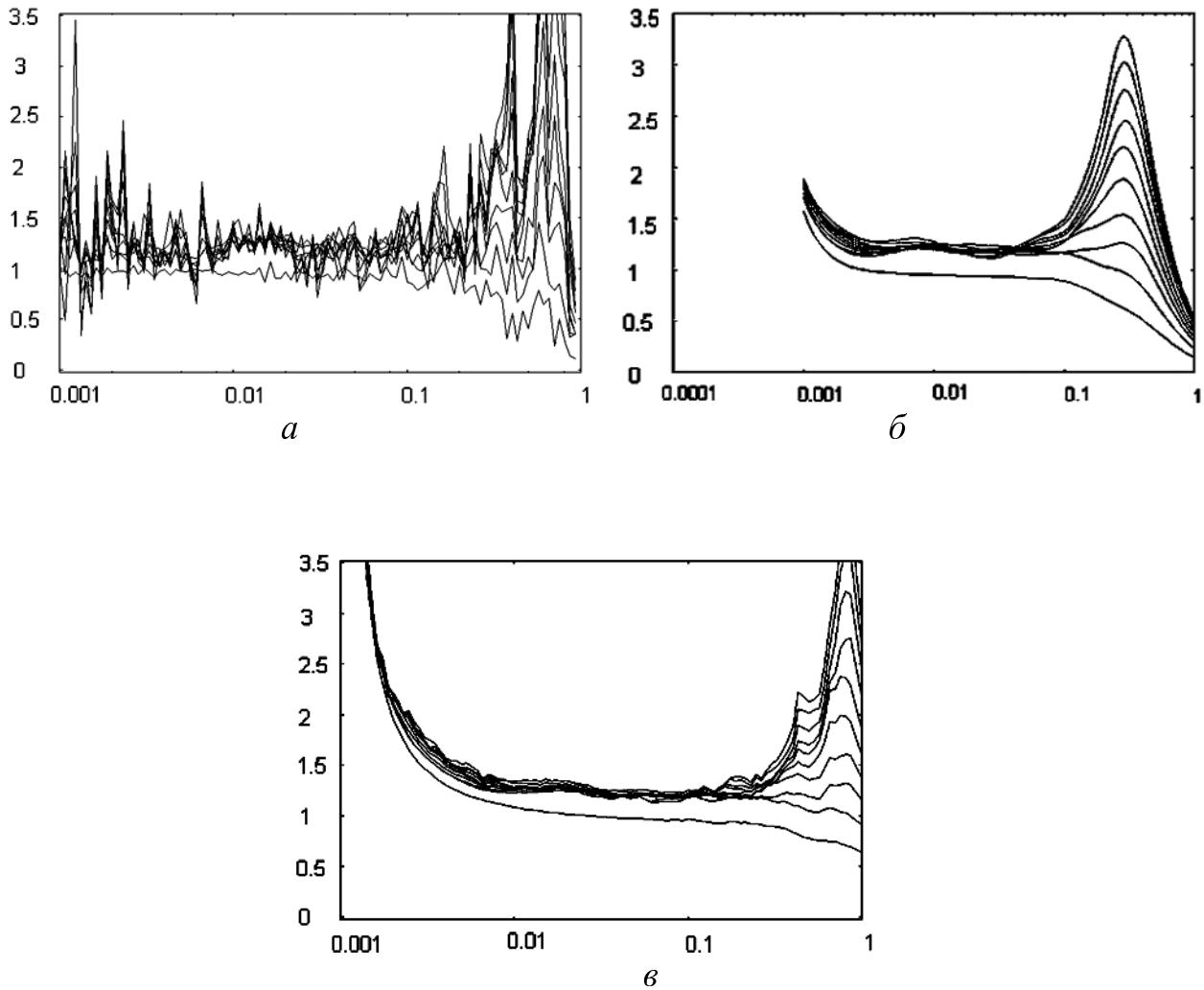


Рис. 6. Графики Раппа: *a*) обычное вычисление корреляционной функции; *б*) корреляционная функция с гауссовым ядром; *в*) оцениватель Такенса (Takens estimator).

Существуют разные способы получения по-возможности гладкого графика Раппа. Самый простой из них — сглаживание графика $C(\varepsilon)$.

Более тонкий способ требует внесения некоторых изменений в процедуру вычисления $C(\varepsilon)$. Суть изменений заключается в том, что ступенчатая функция $\Theta(\varepsilon - r)$ заменяется гладкой $e^{-r^2/4\varepsilon^2}$, где r — расстояние между парами точек x_i и x_j . Первую функцию называют *ступенчатым ядром*, а вторую — *гауссовым* (Gauss kernel) [12].

Ещё один способ решения данной проблемы — применение так называемой *оценки Такенса-Тейлера* (Takens-Theiler estimator). Полученные с её помощью графики могут быть хорошей альтернативой графикам Раппа. Информация об этом методе подробно изложена в [19] и [28].

Приведённые методы облегчают задачу поиска области измерения, но не дают решения проблемы автоматизации вычислений. В настоящее время существуют приёмы, позволяющие выбирать границы искомой области автоматически, но все они вносят в вычисления систематическую ошибку. Постольку поскольку при проведении экспериментальных исследований, как уже говорилось, с систематическими ошибками иногда можно мириться, данные методы часто берутся на вооружение [4, 29, 30].

Очень простой метод используется в компьютерной программе CDA [4]. Здесь искомый участок определяется из графика зависимости $\log C(\varepsilon)$ от $\log \varepsilon$. Точнее говоря, берётся график $C(\varepsilon)$ и строится в двойном логарифмическом масштабе. Он строится только для значений $C(\varepsilon)$, лежащих в пределах от 10^{-5} до 1. Затем берётся участок, проекция которого на вертикальную ось приходится на середину этой оси и занимает $1/4$ указанного диапазона (рис. 7).

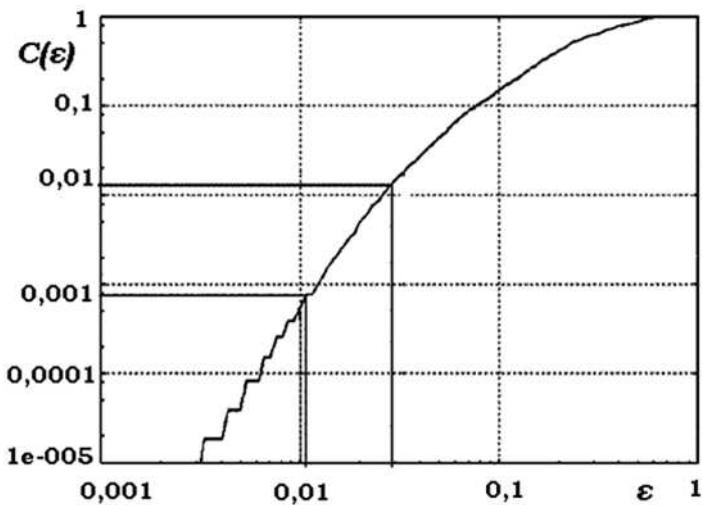


Рис. 7. Определение области измерения (scaling region) по J.C. Sprott.

Значения ε , соответствующие концам этого участка принимаются как границы области измерения. Несмотря на кажущуюся грубость, этот метод даёт вполне удовлетворительные результаты. Следует обратить внимание на то, что для того, чтобы пользоваться этим методом, необходимо привести исходный ряд к интервалу $[0,1]$.

Выбор оптимальной размерности лагового пространства D_{emb} .

Наконец, после того, как для каждого значения D_{emb} вычислена размерность восстановленного аттрактора, необходимо выбрать оптимальную её величину. В идеальном случае это нетрудно (рис. 4). При работе же с ЭЭГ наличие шумов приводит к тому, что выраженного насыщения зависимости $D_2(D_{emb})$ не наступает, и кривая выглядит как показано на рисунке.

Самое простое, что можно сделать в этом случае — задаться размерностью пространства вложения заведомо большей, чем предполагаемая размерность восстановленного аттрактора, и использовать её для всех вычислений в рамках одного эксперимента. Полученная в результате величина хоть и не является D_2 в строгом смысле, но вполне пригодна для внутригрупповых сравнений.

Накопленный на сегодняшний день опыт исследований показывает, что в зависимости от применяемых методов вычислений и условий эксперимента D_2 ЭЭГ принимает значения от 4 до 8 [1, 31]. Если говорить о верхнем ограничении величины D_2 , то здесь нужно помнить о том, что с возрастанием D_{emb} сильно увеличивается время, затрачиваемое на вычисление $C(\varepsilon)$. В связи с этим, на наш взгляд, есть смысл задаваться величиной D_{emb} в пределах $10 \div 15$. В некоторых исследованиях D_2 вычисляют не во всём частотном диапазоне, а только в определённой его части, например в высокочастотной области $15 \div 100$ Гц [32]. В этом случае получаются величины размерностей $15 \div 18$. Соответственно, при таких вычислениях необходимо принимать D_{emb} около 20.

Согласно точке зрения, изложенной в [12], можно уверенно задаваться размерностью лагового пространства $D_{emb} \geq 2D_2 + 1$.

Вышеупомянутые способы выбора D_{emb} позволяют задаваться значениями её величины с точки зрения *достаточности*. Вместо этого можно выбирать *минимально необходимую* размерность лагового пространства. Метод, позволяющий сделать это, называется методом *"поиска ближайших ложных соседей"* (False Nearest Neighbors, FNN) [33].

Суть метода состоит в следующем. Сначала предположим, что мы правильно построили аттрактор в лаговом пространстве, размерность которого больше необходимой. Тогда ближайшая окрестность любой точки восстановленного аттрактора будет отображением ближайшей окрестности соответствующей точки исходного аттрактора. Теперь представим себе, что получится, если

спроектировать аттрактор, да и вообще любую фигуру в пространство, размерность которого недостаточно велика (например, шар на плоскость). Очевидно, что в этом случае некоторые точки исходной фигуры, расположенные далеко друг от друга, на проекции могут оказаться соседними. Такие точки и называются ложными ближайшими соседями.

В [33] приведён следующий алгоритм вычисления относительного количества ложных ближайших соседей в восстановленном аттракторе. В лаговом пространстве выбираются две соседние точки, принадлежащие восстановленному аттрактору - x_i и x_j ; вычисляется расстояние между ними, а также расстояние между следующими двумя точками - x_{i+1} и x_{j+1} . Вычисляем соотношение между этими расстояниями:

$$R = \frac{|x_{i+1} - x_{j+1}|}{|x_i - x_j|}.$$

Поскольку мы имеем дело как правило с гладкими процессами, после одной итерации точки сильно не разбегутся даже при больших значениях показателя Ляпунова λ . Поэтому если полученная величина превышает некоторое пороговое значение (обычно - 10), то точки x_i и x_j можно считать ложными соседями.

С увеличением D_{emb} количество ложных соседей уменьшается. Таким образом, минимально необходимой будет такая размерность лагового пространства, при которой число ложных соседей равно 0 (рис. 8).

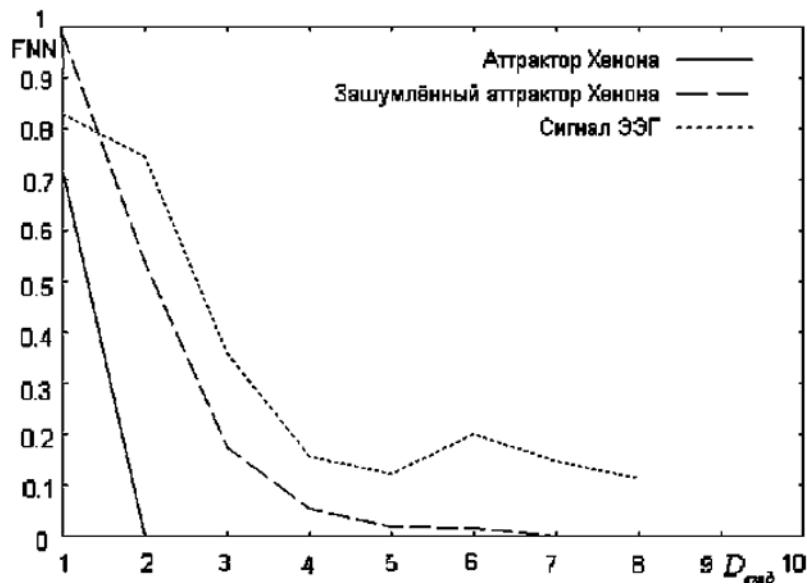


Рис. 8. Относительное количество ложных ближайших соседей (False Nearest Neighbors) в восстановленном аттракторе при различных значениях размерности лагового пространства.

Если исследуется зашумлённый сигнал ЭЭГ, то свести число ложных соседей к нулю невозможно и тогда приходится задаваться некоторым допустимым их

количеством. Наименьшую размерность лагового пространства, при которой относительное число ложных соседей не превышает этого порога и можно считать минимально необходимой для реконструкции аттрактора, а величину D_2 , полученную для данной D_{emb} – его корреляционной размерностью.

5. Реализация алгоритмов вычисления D_2 при помощи пакета программ TISEAN

Вычисление D_2 можно разбить на следующие этапы:

1. Определение параметров – величины лага τ и размеров окна Тейлера w ;
2. Последовательное вычисление размерностей при различных D_{emb} ;
3. Выбор оптимального D_{emb} и соответствующей ему величины D_2 (если для этого пользоваться методом "False Nearest Neighbors", то можно сначала определить оптимальную величину D_{emb} и для неё вычислить D_2).

При запуске программ данного пакета в командной строке необходимо указывать ряд параметров. Мы будем упоминать только те, которые имеют непосредственное отношение к излагаемому материалу.

Определение величины лага.

В пакете есть программа autocor.exe, с помощью которой можно построить автокорреляционную функцию процесса. Величину лага можно выбрать как первый ноль (или локальный минимум) этой функции.

Как уже говорилось, более перспективно использовать для этой цели так называемую "функцию совместной информации" (mutual information). Это позволяет сделать программа mutual.exe, вычисляющая зависимость совместной информации от времени задержки τ . В качестве лага можно рекомендовать τ , соответствующее первому минимуму данной зависимости.

Выбор величины окна Тейлера.

Размер окна Тейлера w можно вычислять, как и величину лага, пользуясь программами autocor.exe или mutual.exe. Для вычисления w при помощи графика пространственно-временного разделения можно воспользоваться программой strp.exe. При запуске этой программы необходимо указывать 2 параметра: время задержки τ и размерность пространства вложения D_{emb} . Первый из этих параметров следует выбирать таким же, как при вычислении собственно D_2 ; второй – D_{emb} – несколько большим, чем предполагаемое значение D_2 .

Вычисление D_2 .

При помощи пакета TISEAN корреляционная размерность вычисляется следующим образом. Сначала вычисляются корреляционные суммы для последовательности значений ε (см. предыдущие разделы статьи). Это делается при помощи программы d2.exe. В параметрах запуска этой программы можно указать заранее вычисленные значения τ и w . Кроме того, эта программа позволяет приводить исходные данные к интервалу $[0,1]$.

Программа формирует четыре файла с результатами вычислений. Нас интересуют два из них. Один (имеет расширение *.c2) содержит значения корреляционных сумм, вычисленных для разных значений ε и D_{emb} . По этим значениям можно построить графики, аналогичные приведённым на рис 3. Другой файл (с расширением *.d2) содержит величины локальных наклонов этих графиков – графики Раппа.

В принципе, пользуясь всеми этими графиками можно определить оптимальные области измерения (для каждого значения D_{emb}), определить по ним значения D_2 , построить график зависимости $D_2(D_{emb})$ и, исходя из него, принять окончательное значение величины D_2 . Однако особенности сигнала ЭЭГ вынуждают пойти более изощрённым путём.

Как уже говорилось, более гладкие графики Раппа можно получить, применив операцию сглаживания исходных графиков, а также воспользовавшись оценивателем Такенса или корреляционным интегралом с Гауссовым ядром. Во всех трёх случаях берётся исходный файл, содержащий корреляционные суммы – *.c2.

Для сглаживания применяется программа av_d2.exe; кроме того, в пакете имеется программа c2d.exe, которая одновременно сглаживает исходные графики и вычисляет их локальные наклоны. Программа c2g.exe, вычисляющая корреляционный интеграл с гауссовым ядром $C_{2g}(\varepsilon)$, также вычисляет локальные наклоны графиков $C_{2g}(\varepsilon)$, построенных в двойном логарифмическом масштабе. Наконец, программа c2t.exe позволяет построить графики, аналогичные графикам Раппа при помощи оценивателя Такенса.

Определение оптимальной величины D_{emb} .

Мы описали три способа выбора оптимального значения D_{emb} : просто установив её фиксированное значение, несколько превышающее предполагаемую величину D_2 , по насыщению графика зависимости $D_2(D_{emb})$ и при помощи алгоритма "false nearest neighbors".

Для последнего случая в пакете TISEAN есть программа false_nearest.exe. Эта программа вычисляет относительное количество ложных ближайших соседей при восстановлении аттрактора в лаговых пространствах различных размерностей. В командной строке программы необходимо задать такие параметры:

ры, как величина лага и размер окна Тейлера. Очевидно, что их нужно выбирать такими же, как при вычислении корреляционной интегральной функции $C(\varepsilon)$. Ещё один параметр запуска этой программы — величина порога R (см. описание алгоритма). По умолчанию она принята равной 10. Следует обратить внимание на то, что при больших D_{emb} соседних точек в аттракторе может оказаться слишком мало для статистики. Это бывает обычно тогда, когда исходный ряд слишком короткий. В этих случаях программа выдаёт соответствующее сообщение и прекращает работу. Практика работы с сигналами ЭЭГ показывает, что для уверенной работы с этой программой необходимо иметь исходный ряд длиной, по меньшей мере, $7 \div 10$ тыс. точек.

6. Автоматизация процесса вычислений с использованием пакета программ TISEAN

Вычисление D_2 в строгом смысле автоматизации не поддаётся. Таким образом, результат, получаемый в результате применения полностью автоматизированного алгоритма, неизбежно содержит систематическую ошибку. Тем не менее, в некоторых ситуациях с этим можно мириться. Например, когда мы изучаем внутригрупповое изменение величины под воздействием изменяющихся условий эксперимента. С другой стороны, автоматизация значительно уменьшает трудоёмкость вычислений, что особенно ценно при работе с большими выборками. Для того, чтобы не возникало путаницы, на наш взгляд целесообразно обозначить вычисляемую величину через D_2^* .

Задачу автоматизации вычислений можно разбить на две части:

- поиск "области измерения" (scaling region) на графике Раппа;
- определение лаговых параметров — величины лага τ , размеров окна Тейлера w и размерности пространства вложения D_{emb} .

Первая часть — поиск "области измерения" — является главным звеном в задаче автоматизации. Различные подходы к решению этой проблемы изложены в [3, 29, 30]. Выше было описано очень простое решение, предложенное J.C. Sprott'ом [3]. Его достоинство заключается в том, что этот способ легко применим для работы с программой TISEAN. Здесь для его реализации достаточно применить три небольшие вспомогательные программы, не вмешиваясь в работу программ пакета.

Первая из этих программ из двойного логарифмического графика зависимости $C(\varepsilon)$ определяет границы "области измерения" на оси ε .

Вторая – вырезает фрагменты графика Раппа, находящиеся в данных границах.

Третья – вычисляет средние значения графиков Раппа на этих участках.

В итоге алгоритм, который мы использовали на практике можно представить в виде блок-схемы на рис. 9.

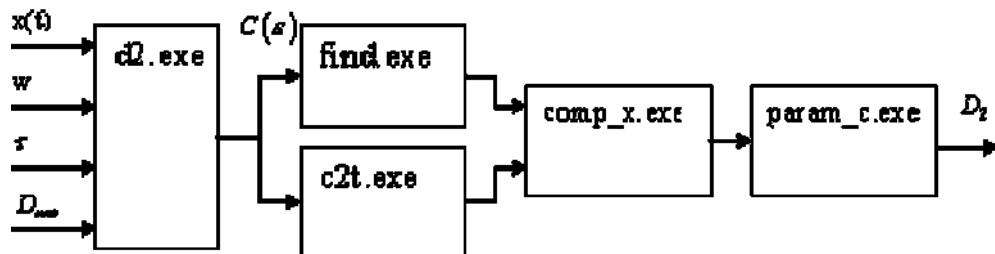


Рис. 9. Алгоритм вычисления корреляционной размерности восстановленного аттрактора при заданных значениях лаговых параметров τ, w и D_{emb} .

Первая, вторая и третья вспомогательные программы называются соответственно `find.exe`, `comp_x.exe` и `param_c.exe`.

Мы упоминали, что для работы по такому алгоритму есть определённый резон приводить исходный ряд к интервалу $[0,1]$. Это позволяет сделать непосредственно программу `d2.exe` – необходимо только поставить соответствующий ключ в командную строку. Поскольку корреляционные суммы вычисляются для нескольких размерностей лагового пространства, вычисления в автоматическом режиме производятся для всех случаев и все результаты записываются в один файл.

В принципе, на этом этапе автоматизации уже можно производить вычисления; для этого лишь надо задаться фиксированными значениями лаговых параметров (τ, w и D_{emb}), что иногда бывает оправдано.

Для вычисления τ мы использовали программу `mutual.exe`. Расстояние до первого минимума функции совместной информации определялось при помощи специально написанной вспомогательной программы – `loc_min2.exe`. Следует отметить, что автоматизация вычисления величины лага не всегда оправдана; во многих случаях её применение приводит к неверным результатам. Например, при вычислении этим способом корреляционной размерности аттрактора Лоренца расхождение полученного результата с её истинным значением было очень велико. При этом практически не наступало выраженное насыщение кривой $D_2(D_{emb})$. Таким образом, практика показывает, что при работе с ЭЭГ зачастую всё-таки есть смысл выбирать просто единичный лаг.

Размер окна Тейлера определяем из графиков пространственно-временного разделения, построенных при помощи программы `stp.exe` (описание этой процедуры – см. выше). Для поиска первого общего локального минимума семейства кривых была написана соответствующая программа – `getextr.exe`.

Поскольку при построении графиков производится восстановление аттрактора в лаговом пространстве, для этой процедуры необходимо задаться величинами τ и D_{emb} . Очевидно, что величина лага должна быть такой же, как и при вычислении собственно D_2 . Размерность лагового пространства должна быть несколько большей, чем предполагаемая размерность восстановленного аттрактора, и уж точно, не меньшей, чем D_{emb} при вычислении D_2 .

В этом случае блок-схема алгоритма вычисления лаговых параметров будет как на рис. 10.

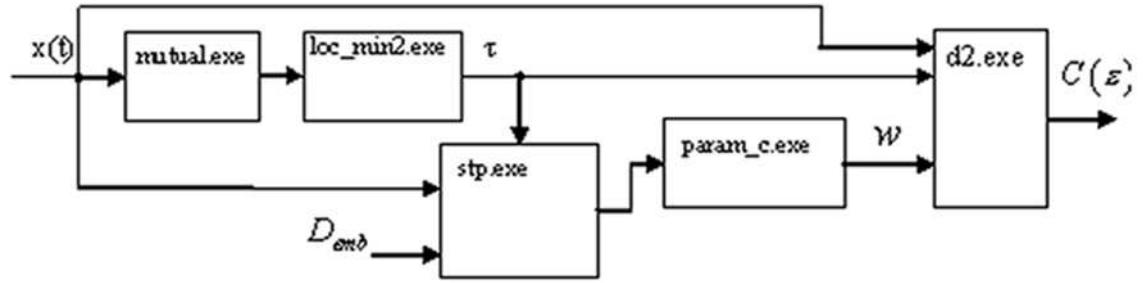


Рис. 10. Вычисление лаговых параметров τ и w (величины лага и размеров окна Тейлера) при заданной размерности лагового пространства.

Наконец, последний параметр, необходимый для вычисления D_2 – размерность лагового пространства – можно вычислить при помощи программы `false_nearest.exe`. Лаговые параметры, которые используются при вычислении опять-таки принимаются такими же, как при вычислении D_2 . Блок схема алгоритма приведена на рис. 11.

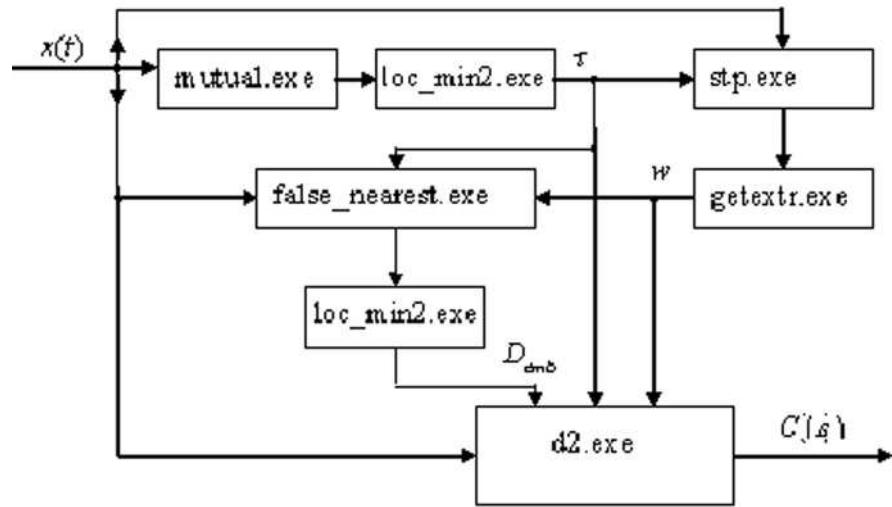


Рис. 11. Автоматическое вычисление всех лаговых параметров, необходимых для вычисления корреляционной размерности восстановленного аттрактора.

Следует отметить, что программой `false_nearest.exe` нельзя пользоваться при построении графиков пространственно-временного разделения, так как последние используются для вычисления величины w , которая необходима для работы программы, то есть получится замкнутый круг. С другой стороны, выбор чрезмерно большой размерности лагового пространства для этих целей не слишком сильно искажает результат. Во всяком случае так показали наши вычислительные эксперименты с сигналами ЭЭГ.

При обработке ЭЭГ можно пользоваться разными алгоритмами: от использования фиксированных значений абсолютно всех лаговых параметров до вычисления всех их значений в автоматическом режиме. На наш взгляд есть определённый резон производить вычисления с фиксированной размерностью лагового пространства D_{emb} . Дело заключается в том, что в некоторых случаях программе `false_nearest.exe` не хватает количества точек исходного ряда, и на её выходе появляются неверные результаты. Кроме того, в этом случае формат выходного файла также слегка меняется, что недопустимо при последовательной автоматической обработке массива исходных данных. При этом минимально необходимое количество точек зависит не только от такого параметра, как D_{emb} , но и от особенностей самого сигнала. Поэтому предугадать сбои заранее не представляется возможным.

С другой стороны, с точки зрения исследования изменений в пределах выборки вполне резонно задаваться фиксированным значением D_{emb} . Такой подход позволяет избегать артефактных результатов вычислений, сохраняя их релевантность.

Данные методы хорошо зарекомендовали себя при вычислении корреляционной размерности восстановленного аттрактора классических хаотических процессов. Так, например, для аттрактора Лоренца была получена величина 2,063, а для аттрактора Хенона – 1,253 (считается, что эти аттракторы имеют размерности 2,06 и 1,26 соответственно). Вычисления проводились в автоматическом режиме, но с фиксированным единичным лагом.

Заключение

Спектр нелинейных характеристик хаотических процессов очень широк и не исчерпывается теми, что приведены в настоящей работе. Но даже те, которые здесь упоминаются, далеко не всегда применяются в исследованиях, что с нашей точки зрения является упущением.

В статье уделено большое внимание вычислению корреляционной размерности восстановленного аттрактора ЭЭГ – D_2 – при помощи пакета программ

TISEAN. Однако, поскольку данная статья не посвящалась данному пакету как таковому, в ней не отражены все его возможности (например, нелинейная фильтрация шума и многое другое).

Несмотря на то, что не все приёмы, описанные в статье, имеют строгую доказательную математическую базу, практическое применение многих из них дало весьма неплохие результаты при анализе ЭЭГ [34, 35, 36].

Дополнительные программы-утилиты доступны на сайте в сети Интернет: <<http://mekler.narod.ru/science/chaos.htm>>.

Автор выражает благодарность зав. учебной лабораторией психофизиологии ф-та психологии СПбГУ Горбунову И.А. и ведущему инженеру ИМЧ РАН Соловьёвой М.Л., написавшим программный код для всего вспомогательного ПО, а также ведущему научному сотруднику ИМЧ РАН Данько С.Г., оказавшему организационную поддержку данной работы.

Resume

Applications of the methods of nonlinear dynamical systems analysis for EEG signal processing, by A.A. Mekler.

Different methods of analysis of chaotic processes are described. Description of calculating of correlation dimension is provided in details. Attention is focused on processing of finite and noisy data sets - human EEG. Methods, which are helpful for work with such kind of data, are described, namely - Theiler window, Takens-Theiler estimator, Gaussian kernel correlation integral and some other. Also, there are provided some methods of automation of calculations. All methods of calculation are described regarding the specifics of EEG. Algorithms, that are described here, are designed for work with TISEAN software package. All additional software, which was developed for automating, is available at <<http://mekler.narod.ru/science/chaos.htm>>. Article is aimed to be helpful for investigators, whose interests are lying in the sphere of neurosciences. However it may be useful for other scientists, whose work is related to nonlinear analysis of time series and who have deal with processing of large amount of data.

Список литературы

1. *Elbert T., Ray W.Z. and others.* Chaos and physiology: Deterministic in Excitable Cell Assemblies. Phisiol. Rev. Vol. 74, # 1, 1994. P. 1 - 47.
2. *Grassberger P., Schreiber T., Schaffrath C.* Nonlinear time sequence analysis. Int. J. Bifurcat. Chaos 1, 1991.
3. *Babloyantz A.* Strange Attractor In the Dynamics of rain Activity// Complex Systems – Operational Approaches. Under edit. H. Haken. Berlin, Springer, 1985.
4. *Sprott, J. C., Rowlands, G.* Chaos data analyzer; the professional version. AIP, NY, 1995.

5. Lempel, A., Ziv, J. On the complexity of finite sequences, IEEE Trans. Infor. Theory, IT-22, 1976. P. 75-81.
6. Хакен Г. Принципы работы головного мозга. М.: 2001.
7. Николис Г. Пригожин И. Познание сложного. М. 1990.
8. Mandelbrot B. Fractals: Form, Chance, Dimension. Freeman, San-Francisco, 1977.
9. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979.
10. Гольденберг Л. М. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1990.
11. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
12. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence// Dynamical Systems and Turbulence. Under edit. D.A. Rand and L.S. Young. Warwick 1980, Lecture Notes in Mathematics, 898, Springer, Berlin, 1981. P. 366-381.
13. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors// Physical Review Letters, 1983, v.50. P. 346-349.
14. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A Practical Method for Calculation Largest Lyapunov Exponents for Small Data Sets// Physica D, 65, 117, 1993.
15. Sano M. Sawada J. Measurement of the Lyapunov Spectrum From a Chaotic Time Series// Physical Review Letters 55, 1082, 1985.
16. Zbilut J.P., Webber C.L. Jr. Embeddings and Delays As Derived From Quantification From Recurrence Plots// Physics Letters A, 171, 199-203, 1992.
17. Webber C.L., Zbilut J.P. Dynamic Assessment of Physiological Systems and States Using Recurrence Plot Strategies// J. Appl. Physiol. 76, 1994. P. 965-973.
18. Skinner J.E., Carpegnani C., Landisman C.E., Fulton K.W. Correlation dimension of heartbeat intervals is reduced in conscious pigs by myocardial ischemia// Circulation Research. Vol. 68, 1991. P. 966-976.
19. Hegger R., Kantz H., and Schreiber T. Practical Implementation of Nonlinear Time Series Methods// The TISEAN package, CHAOS 9, 1999.
20. Rapp P. E., Bashore T., Martinerie J., Albano A. Zimmerman I. and Mess A. Dynamics of Brain Electrical Activity// Brain topography, 2, 1989. P. 99-118.
21. Tsonis A. Chaos: from Theory to Applications. NY. Premium Press. 1992.
22. Essex, C. and Nerenberg, M.A.H. Comment on "Deterministic Chaos: The Science and the Fiction" by D. Ruelle. Proc. R. Soc. Lond. A, 435, 1991. P. 287-292.
23. Ruelle, D. Deterministic chaos: the science and the fiction// Proc. R. Soc. Lond. A, 427, 1990. P. 241-248.
24. Theiler J. Spurious Dimension from Correlation Algorithms Applied to Limited Time Series Data// Physical Rev. A, 34, # 3, 2427, 1986.

25. Widman G., Schreiber T., Rehberg B., Hoeft A., and Elger C. E. Quantification of Depth of Anesthesia by Nonlinear Time Series Analysis of Brain Electrical Activity// Physical Rev. A, 62, 4898, 2000.
26. Provenzale A., Smith L. A., Vio R., and Murante G. Distinguishing Between Low-Dimensional Dynamics and Randomness in Measured Time Series// Physica D, 58, 31, 1992.
27. Fraiser A.M., Swinney H.L. Independent Coordinates for Strange Attractors From Mutual Information// Physical Rev. A, 33, # 2, 1134 - 1140, 1986.
28. Takens, F. On the numerical determination of the dimension of an attractor// Dynamical systems and bifurcations(Eds. B.L.J. Braaksma, H.W. Broer and F. Takens). Lect. Notes in Math. 1125, Springer, Heidelberg. 1985. P. 99–106.
29. Lehnertz K. and Elger C. E. Can Epileptic Seizures be Predicted? Evidence from Nonlinear Time Series Analysis of Brain Electrical Activity// Physical Rew. Letters, 80, # 22, 5019 - 5022, 1998.
30. Dvořák I., Klashka J. Modification of the Grassberger-Procaccia Algorithm for Estimating the Correlation Exponent Of Chaotic Systems With High Embedding Dimension// Physics Letters A, 145, # 5, 225 – 231, 1990.
31. Das A., Das P. Characterization of Chaos Evident in EEG by Nonlinear Data Analysis. Complexity, vol. 7, # 3, 2002.
32. Ефремова Т.Н., Куликов М.А. Хаотическая составляющая высокочастотной ЭЭГ человека в состоянии спокойного бодрствования. // Журн. высш. нервн. деятельности, т. 52, №3, 2002. С. 283-291.
33. M. B. Kennel, R. Brown, and H. D. I. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction// Phys. Rev. A, 45, 3403, 1992.
34. Меклер А.А. Применение методов нелинейного анализа ЭЭГ: Тез. междунар. науч.-практ. конфер. студ. и аспир. "Психология XXI века" (ред. В. Б. Чесноков). СПб.: СПбГУ, 2003. С. 345-346.
35. Меклер А.А. Зависимость нелинейных характеристик ЭЭГ от эмоционального состояния испытуемого: Тез. междунар. науч.-практ. конфер. студ., аспир. и молод. спец. "Психология XXI века" (ред. В. Б. Чесноков). СПб.: СПбГУ, 2004. С. 86-87.
36. Меклер А.А. Обработка ЭЭГ методами фрактального анализа. // Рос. физиол. журн. им. И.М. Сеченова. Т. 90, №8, 2004. С. 77.